ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА МАТИЧЕСКИХ ПРОГРАММ MATHCAD

Методические указания к лабораторным работам

Омск 2006

Составитель Осипов Вадим Евгеньевич

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

Редактор В.И. Топоров

ИД 06039 от 12.10.01

Свод. темплан 2006 г.

Подписано к печати 31.06.06. Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,0. Уч. изд. л. 2,0

Тираж 100 экз. Заказ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящих методических указаниях рассматриваются вопросы применения математических пакетов прикладных программ на примере пакета Mathcad 2001.

Интерфейс пакета Mathcad не всегда очевиден. Поэтому лицам, впервые приступающим к изучению пакета, рекомендуется предварительно ознакомиться с приложениями 1, 2.

Для улучшения восприятия материала введены следующие обозначения:

- реализация поставленных задач в пакете Mathcad (содержание рабочего листа) обведена двойной рамкой ▯;
- текстовая часть примеров завершается символом ◙.

Лабораторная работа № 1
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

I. Построение двумерных графиков функций

Двумерный график может отображать функции, заданные различными способами. Непрерывные и кусочно-непрерывные функции f(x) непрерывного аргумента x (т.е. когда аргумент может принимать любое значение в некотором интервале $x1 \le x \le x2$) задаются аналитически. Функции дискретного аргумента задаются в виде таблицы. Способ получения табличных значений может быть любым, в том числе и на основании аналитической зависимости.

Пример 1.1. (Построение графика непрерывной функции). Вольтметр двойного интегрирования имеет погрешность, обусловленную присутствием на его входе косинусоидальной помехи. Построить график зависимости этой погрешности от периода T сигнала помехи для $10^{-4} \le T \le 2 \cdot 10^{-2}$. Известна формула погрешности:

$$\Delta = Up \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\sin\left(\pi T_V / T\right)}{\pi T_V / T},$$

где Δ – погрешность; Up – амплитуда напряжения помехи; ϕ – начальная фаза; T_V – продолжительность первого этапа интегрирования; T – период сигнала помехи.

На рисунке 1 показано, как наиболее простым способом нарисовать график этой функции, заданной аналитически. В соответствии с требованиями к *структуре документа Mathcad* (см. приложение 1) на рабочем листе сперва размещены формульные блоки с величинами, входящими в функцию погрешности, затем следует формульный блок с описанием самой функции погрешности Δ(T), а следом помещен блок графика.

На данном рисунке показан последний этап заполнения шаблона для построения графика. При заполнении шаблона обратите внимание на следующие три момента.

! При данном способе построения графика имя аргумента T в описании пользовательской функции Δ(T) не должно совпадать с именем независимой переменной, указываемом блоке графика (t).

! Если при заполнении шаблона графика не указать на оси абсцисс требуемые пределы (0.0001 и 0.02) изменения независимой переменной t, то по умолчанию будут подставлены пределы минус 10 и плюс 10.

! По умолчанию пределов по оси ординат, производится автоматическое масштабирование и, как правило, в окно выводится весь график. Но иногда этого не происходит, и тогда требуется указать пределы отображения и по оси ординат.

$\phi := 0 \quad Up := 0.1 \quad Tv := \frac{1}{50}$

$$\Delta(T) := Up \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot Tv}{T}\right)}{\frac{\pi \cdot Tv}{T}}$$

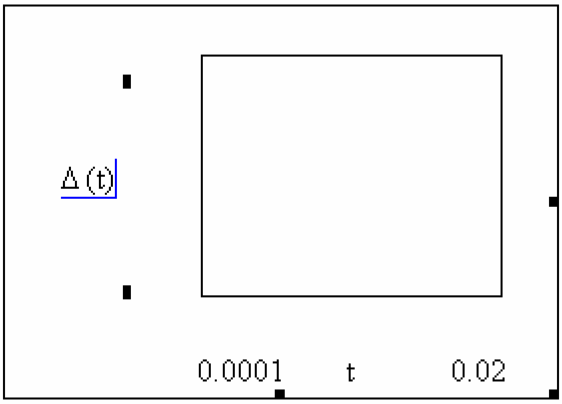
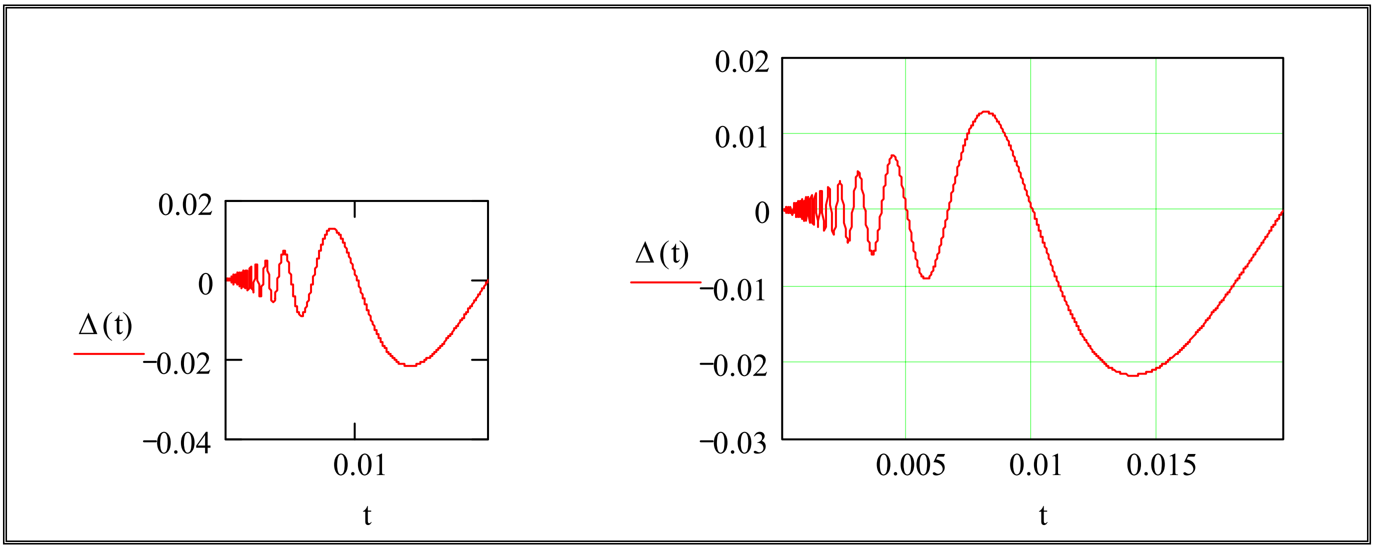


Рисунок 1

По окончании заполнения шаблона для построения графика (нажатием клавиши табуляции или щелчком мыши вне заполняемых позиций формы), блок графика приобретает вид, изображенный на рисунке 2а. На рисунке 2б показан график, увеличенный в размере и имеющий координатную сетку. ◙



а) б)

Рисунок 2

Пример 1.2. (Построение графика кусочно-непрерывной функции). Пусть кусочно-непрерывная функция y(x) задана следующей системой:

$$y = \begin{cases} 6\dfrac{tg\ x + \lg|x-1|}{2x+5}, & -1 \le x \le 0; \\ 3 \cdot \sqrt[3]{x}, & 0 < x \le 1; \\ 5\sin 2x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Построить график функции для $-1 \le x \le 2$.

Заключительный этап реализации поставленной задачи изображен на рисунке 3. Описание функции y(x) выполнено с помощью средств панели Программирование (см. приложение 5), которые будут подробнее рассмотрены в лабораторной работе № 3. ◙

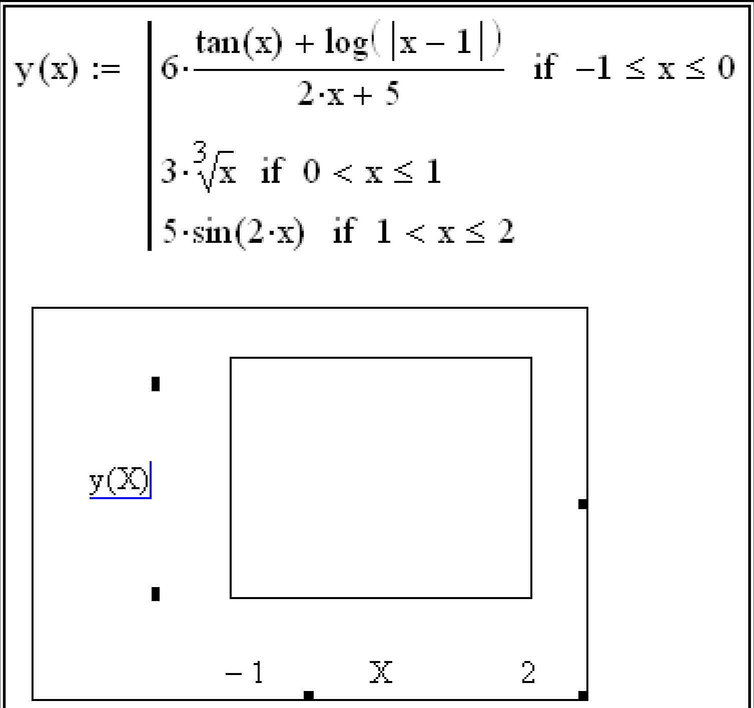


Рисунок 3

Как указано выше, Mathcad рисует графики не только функций, заданных аналитически, но и таблично.

Пример 1.3. (Построение графика табличной функции). Нарисовать функцию, заданную таблицей 1.

Последний этап реализация задания изображен на рисунке 4.

Таблица 1

x	y
– 3	– 0.141
– 1,5	– 0.997
0	0
1,5	0.997
3	0.141

Переменные *x*, *y* определены как матрицы с пятью строками и одним столбцом (одномерные массивы). Вставка матрицы осуществляется через меню – *Insert* → *Matrix* (*Вставка* → *Матрица*), где *Rows* – число строк, а *Columns* – число столбцов.

В шаблоне для построения графика пределы изменения независимой переменной *x* можно не указывать. В этом случае пределы определяются минимальным и максимальным значениями, содержащимися в массиве *x*.

На рисунке 5а показан график с линейной интерполяцией промежуточных значений (по умолчанию), а на рисунке 5б – без интерполяции, с указанием окружностями отсчетов (во вкладке «трассировки» указывается тип stem).

Можно выполнять *трассировку графика* (см. приложение 3). ◙

$$x := \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 0 \\ 1.5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -0.141 \\ -0.997 \\ 0 \\ 0.997 \\ 0.141 \end{pmatrix}$$

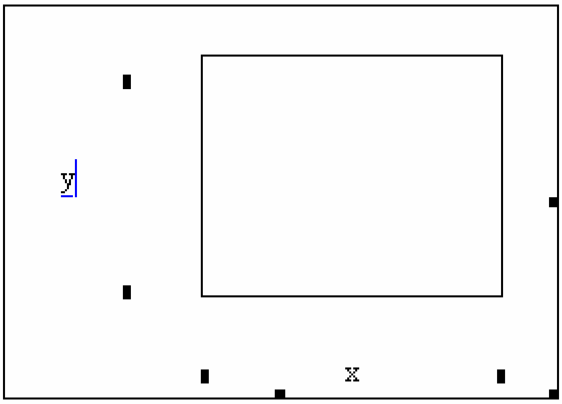


Рисунок 4

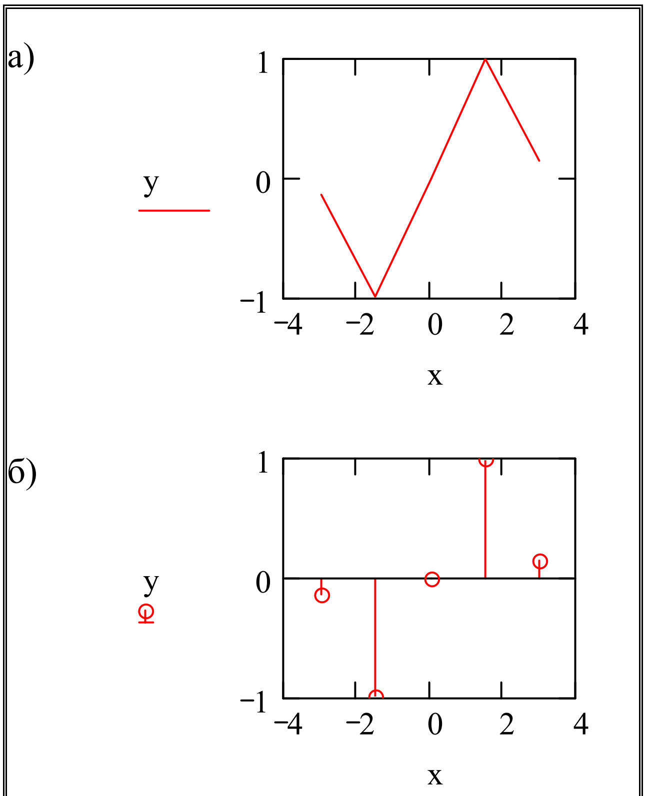


Рисунок 5

$z := -2, -1.3 .. 1$ $\qquad$ $y := -2 .. 1$

z =

-2
-1.3
-0.6
0.1
0.8

y =

-2
-1
0
1

Рисунок 6

Наряду с указанными выше двумя способами построения графиков (аналитических и табличных функций) существуют и другие способы, представляющие собой комбинации рассмотренных выше способов. В литературе часто встречается способ, когда вводят *ранжированную переменную*, которая пробегает конечный ряд значений. Этот ряд может быть определен двумя или тремя аргументами. В случае трех аргументов указывают: первое, второе значения и верхнюю границу изменения ранжированной переменной (переменная z, рисунок 6). В случае, если переменная должна принимать целые значения, достаточно указать первое и последнее значения (переменная y). ***Внимание!*** Две точки перед единицей вводятся не с клавиатуры, а также как и *перечисление* (см. раздел «Редактор формул» в приложении 1).

Подставляя ранжированную переменную в аргумент аналитической функции, получаем соответствующий ряд значений функции.

Пример 1.4. (Построение графика с помощью ранжированной переменной). Построить график функции из примера 1.1. Период сигнала помехи должен задаваться ранжированной переменной, пробегающей указанный выше диапазон с шагом 10^{-4}.

Последний этап реализации данной задачи показан на рисунке 7. ◙

$$t := 10^{-4}, 2\cdot10^{-4} .. 2\cdot10^{-2} \qquad \phi := 0 \qquad Up := 0.1 \qquad Tv := \frac{1}{50}$$

$$\Delta(t) := Up\cdot\cos(\phi)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot Tv}{t}\right)}{\frac{\pi\cdot Tv}{t}}$$

t =

	1
1	$1\cdot10^{-4}$
2	$2\cdot10^{-4}$
3	$3\cdot10^{-4}$
4	$4\cdot10^{-4}$
5	$5\cdot10^{-4}$
6	$6\cdot10^{-4}$
7	$7\cdot10^{-4}$
8	$8\cdot10^{-4}$
9	$9\cdot10^{-4}$
10	$1\cdot10^{-3}$

Δ(t) =

0
0
$4.135\cdot10^{-4}$
0
0
$-8.27\cdot10^{-4}$
$1.086\cdot10^{-3}$
0
$9.207\cdot10^{-4}$

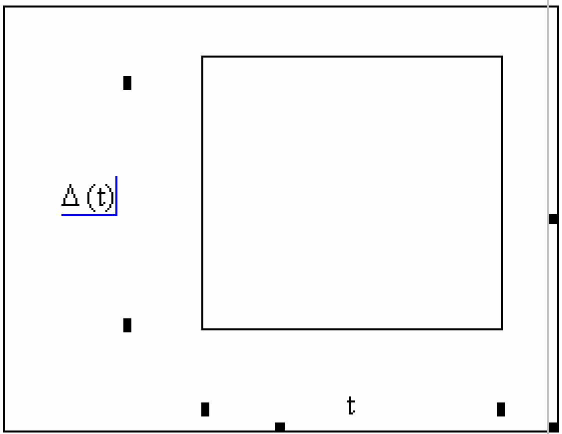


Рисунок 7

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Построить график функции двумя способами:

– по примеру 1.1;
– по примеру 1.4 в 20–100 точках указанного числового отрезка.

Таблица 2

Вариант	Переменные	Формула
1	a=3; b= –0,5 $x\in[0{,}6,\ 1{,}4]$	$y := a - \frac{\lg(a+x)\cdot x^{b}}{\cos(x\cdot\pi)}$
2	b= 1,5 $x\in[1{,}1,\ 1{,}55]$	$y = \frac{b^{5} - \mathrm{tg}\ x}{\ln\ x}$

Продолжение таблицы 1

Вариант	Переменные	Формула
3	a=1,3; b= 2,5 x∈[1,5, 2,5]	$y = \dfrac{a \cdot b - e^{a \cdot x} + \cos x}{\lg\left(x\right) + 1}$
4	a=1,5; b= –100 x∈[0,8, 1,3]	$y = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b} - 3^{a \cdot x}\right) \cdot \cos x}{\sqrt{x + 2}}$
5	a=1; b= 2 x∈ [–0,5, 0,5]	$y = \dfrac{\left(a + \sqrt[3]{x + 3}\right) \cdot \left(x + b\right)}{\ln b}$
6	a=π; b= 5 x∈[6,0, 6,25]	$y = \dfrac{b \cdot e^{\left(x - b\right)}}{\operatorname{tg}\left(5 \cdot x\right)} + \dfrac{a}{b}$
7	a=π/2; b= –0,9 x∈[1, 2]	$y = \dfrac{x^{b} - a^{x}}{b^{2} + a^{x}} \cdot 3$
8	a=1,1; b= 4 x∈[–1, 3]	$y = \dfrac{\ln\left(\left\lvert x + a \right\rvert\right) b}{\sqrt{a^{b}} - \sin b}$
9	a=2 x∈[2, 2,5]	$y = \dfrac{\sin^{2} x - a^{x}}{\sqrt{x \cdot \pi - 4} - a}$

Продолжение таблицы 1

Вариант	Переменные	Формула
10	a=3 x∈[1,5, 4,0]	$y = \dfrac{\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{a}}{\lg\left(\left\|\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{a}\right\|\right)}$
11	a=4 x∈ [–10, 2]	$y = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\|x + 1\| + a}} + \dfrac{1}{a}}{\operatorname{arctg}(a - x)}$
12	a=5 x∈ [0, 2,5]	$y = \dfrac{\lg^2(x + a) - \|x + a\|}{\cos^2(x + a)}$
13	a=0,5; b= –3 t∈[–1,1, 0]	$z := \dfrac{\dfrac{1}{\cos(t)} + \dfrac{1}{\cos^3(t^2)} + t}{e^{2\cdot t\cdot b}}$
14	a= –π; b= π t∈[0,1, 0,5]	$z := \dfrac{\sin(a\cdot t) + \left\|t^{10}\right\|}{\cos(b\cdot t) + \dfrac{1}{5}}$
15	a= 14; b= 200 t∈[10, 15]	$z = \dfrac{\ln(t^{2,5} + a) - \sqrt{\lg(t^2)}}{\operatorname{arctg}\dfrac{t}{b}}$

Продолжение таблицы 1

Вариант	Переменные	Формула
16	a= 50; b= π/3 t∈[3, 15]	$z = \dfrac{e^{0,01\cdot a} - \cos(b\cdot t)\cdot \lvert t\rvert}{\lg^5 t + \dfrac{1}{t}}$
17	a= π; b= 2π t∈[0,7, 0,78]	$z = \dfrac{e^{\sin(a\cdot t)} + \cos(b\cdot t)}{2\cdot\cos^2(a\cdot t) - a} + \dfrac{1}{t}$
18	a= –2; b= 3 t∈[2, 4]	$z = \dfrac{\lg t + \lvert t\rvert}{a\cdot t^2}\cdot b + t^{2,5}$
19	a= –1 t∈[8,0, 9,4]	$z = \left\lvert \dfrac{\cos(2\cdot t)}{a + \sin t} \right\rvert + t^2\cdot\sqrt{\sin t}$
20	a= –π; b= π t∈[3,8, 4,6]	$z = \dfrac{t^3}{\cos(a\cdot t) + \sin(b\cdot t)} + \lvert t\cdot e^t\rvert$
21	c= –1; d= 1,5 x∈ [0, 3]	$y = \sin(x)\cdot c + \dfrac{\lg(d+x)}{\sqrt{d}}$
22	c= 2; d= –2,5 x∈ [2, 4,6]	$y = \dfrac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln x} + \dfrac{x}{c}}{\lvert d\cdot x\rvert}$
23	c= 10; d= –9 x∈ [0, 1,5]	$y = \operatorname{tg}(x)\cdot\dfrac{\lg(\lvert d+x\rvert)}{\sqrt{c\cdot x} + d}$

Продолжение таблицы 1

Вариант	Переменные	Формула
24	c= 5; d= 6 x∈ [–4, 3]	$y = \dfrac{\sqrt{(x\cdot c)^2 + d}}{c^{0.1d} - \lg(\lvert d\cdot x\rvert)}$
25	c= –1,6; d= 3 x∈ [0,5, 3]	$y = \dfrac{x^d \cdot \cos x}{\sqrt{d - x} + c}$
26	c= –3; d= 5π x∈ [–1, 1]	$y = \dfrac{\operatorname{arctg}(x\cdot d) + \lvert x\rvert}{\sqrt{d - x} + c}$
27	c= –8; d= 7 x∈[–1, 1]	$y = \dfrac{\dfrac{1}{c + x} + e^{\lvert \sin x\rvert}}{\lg(d - x)}$
28	c= 1; d= 2 x∈ [8, 9,5]	$y = \dfrac{\operatorname{tg}(c + x) - \dfrac{1}{\lg(c\cdot x)}}{\sqrt[5]{d\cdot x}}$
29	c= 1,7; d= 0,5 x∈ [–2, –1]	$y = \dfrac{\sin(\ln(c + d\cdot x)) + (d + x)^3}{c\cdot x^2 + d\cdot x - 1}$

Продолжение таблицы 1

Вариант	Переменные	Формула
30	c= 6; d= 10 $x \in [-1,\ 1]$	$y = \sqrt[3]{\dfrac{\lg(c+x) + e^{5 \cdot c}}{d^{c+x} + d}}$

II. Построение графиков поверхностей

График поверхности строится по данным из двумерного числового массива. Поскольку график строится на основе матрицы, содержащей только координаты высот фигуры, то истинные масштабы по осям X и Y неизвестны и на рисунках не проставляются, а выводятся порядковые номера элементов матрицы.

Вставка графика в поле редактора осуществляется через меню *Insert → Graph → Surface Plot* (*Вставка → График → Поверхность Plot*) или комбинацией клавиш Ctrl+2. В левый нижний угол шаблона для построения графика вводят имя массива.

График легко вращается и меняет свой размер с помощью мыши.

Пример 1.5. Построить график поверхности для функции из примера 1.1, изменяя период сигнала помехи T в указанном выше диапазоне и начальную фазу ϕ в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

Решение. Реализация данной задачи приведена на рисунке 8.

Вначале, используя формулу П6.1 (см. приложение 6), формируем одномерные массивы T_j и ϕ_k, соответствующие независимым переменным T и ϕ. Затем формируем матрицу $\Delta_{j,k}$. Заметим, что строка «j,k» должна находиться в поле нижнего индекса переменной Δ. На рисунке 8 график развернут и перпендикулярно оси Z нанесены линии сетки. ◙

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

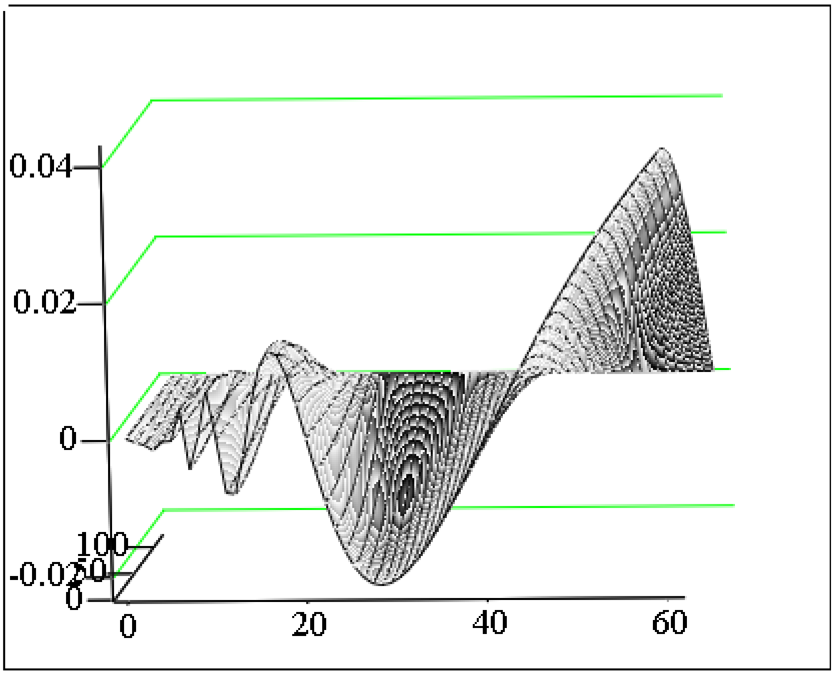
Построить график поверхности, взяв за основу функцию из предыдущего задания. В качестве второй независимой переменной возьмите любую из переменных, оставшихся в заданной формуле, и изменяйте в произвольных пределах.

$$\phi := 0 \quad Up := 0.1 \quad Tv := \frac{1}{50}$$

$$N := 60 \quad T1 := 10^{-5} \quad T2 := 3\cdot 10^{-2} \quad j := 0..N \quad T_j := \frac{T2 - T1}{N}\cdot j + T1$$

$$N1 := 2\cdot N \quad \phi 1 := 0 \quad \phi 2 := \frac{\pi}{2} \quad k := 0..N1 \quad \phi_k := \frac{\phi 2 - \phi 1}{N1}\cdot k + \phi 1$$

$$\Delta_{j,k} := Up\cdot\cos(\phi_k)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot Tv}{T_j}\right)}{\frac{\pi\cdot Tv}{T_j}}$$



Вставьте имя массива

Δ

Рисунок 8

III. Нахождение корней уравнений с полиномиальными функциями

В ходе синтеза линейных частотных фильтров требуется вычисление корней полиномов. Вычисление корней полинома $a_n\cdot x^n+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$ (т. е. решение уравнения $a_n\cdot x^n+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0 = 0$) осуществляется с помощью функции polyroots(), в аргумент которой помещается вектор-столбец коэффициентов полинома. Нулевая (верхняя) строка вектора есть a_0, а n-ная строка есть a_n. Вставка матрицы – *Insert* → *Matrix* (*Вставка* → *Матрица*); *Rows* – число строк, *Columns* – число столбцов.

Внимание! При вводе функции с клавиатуры сразу после слова «polyroots», без пробелов, ставьте круглые скобки, в которые и помещайте матрицу.

Пример. Найти корни уравнения $4x^3–3x^2+5=0$.

Решение.

$$r := \text{polyroots}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \qquad r = \begin{pmatrix} -0.877 \\ 0.813 - 0.874i \\ 0.813 + 0.874i \end{pmatrix}$$

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ № 3

Вычислить корни полинома.

№	Полином	№	Полином
1	$5x^4–7x^3–8x^2+x+4$	16	$–x^4+6x^3+3,5x^2+2x$
2	$10x^4+4,4x^3+9x^2–0,1x+5$	17	$4x^4+3x^3–2x^2–x–3$
3	$–5x^4–5,5x^3+4x^2+6x–8$	18	$5x^4+4x^3+4,5x^2–9x+10$
4	$–3x^4–6x^3+9x^2+8x+10$	19	$–x^4–x^3–5x^2–10x–5$
5	$–14x^4–12x^3–7x^2–7x–4$	20	$–6x^4–10x^3+8x^2–13x+4$
6	$–x^4+x^3+7x–7$	21	$13x^4+7x^3+10x^2–11x+6$
7	$–4x^5+15x^4+12x^3+12x^2–8x–1$	22	$2x^4+13x^3+2x^2–5x–12$
8	$–13x^5+9x^4–12x^3+10x^2+11x+8$	23	$11x^5–x^4+3x^3+5x^2+14x–10$
9	$13x^5+13x^4–9x^3–11x^2–15x+3$	24	$14x^5+10x^4+9x^3+14x^2–7x–6$
10	$3x^5+3x^4–2x^3–10x^2+10x–6$	25	$–4x^5+13x^4+13x^3+4x^2–4x+12$
11	$–14x^5–14x^4+2x^3+12x^2–x–2$	26	$–4x^5+10x^4+13x^3–6x^2–4x$
12	$–9x^5–13x^4–x^3+x^2+15x–6$	27	$6x^5–13x^3+2x^2+4x–14$
13	$–x^5–10x^4+9x^3+6x^2+9x–8$	28	$x^5+5x^4–3x^3–12x^2–14x–9$
14	$–11x^5–10x^4+10x^3+9x^2–5x–3$	29	$–x^5–12x^4+8x^3+12x^2+6x–3$
15	$–10x^5+6x^4–11x^3+3x^2–7x–12$	30	$–12x^4+5x^3+13x^2+2x+4$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Лабораторные задания.
2. Реализация заданий в Mathcad.

Лабораторная работа № 2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

I. Системы линейных уравнений

Нахождение токов и напряжений в линейных электрических цепях сводится к решению систем линейных уравнений.

Системы линейных уравнений решаются в Mathcad двумя способами.

А. Способ итераций (начальных подстановок).

$x := 10 \qquad y := 10$ <<<==== *Начальные приближения*

$$\text{Given}\quad \begin{aligned} 2\cdot x + y &= 38 \\ 3\cdot x + 4\cdot y &= 77 \end{aligned}$$

<<<==== *Система уравнений*

$z := \text{Find}(x, y) \qquad z = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$ <<<==== *Вывод результата*

Замечания.

1. До ключевого слова Given (дано) вводят начальные приближения.

2. Между ключевыми словами **Given** и **Find** (найти) должна находиться система уравнений. При этом функция find(x,y) должна находиться не выше системы уравнений. Знаки равенства в системе уравнений вводятся нажатием кнопки с жирным знаком равенства, расположенной на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Boolean* (*Вид→ Панели инструментов → Булевое*).

3. Вывод результата вычислений должен располагаться не выше функции Find(x,y).

Б. Матричный способ решения системы.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 38 \\ 77 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1}\cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Замечания.

1. Исходные данные (матрицы A, B) вводятся кнопкой [:::], расположенной на панели инструментов *View → Toolbars→Matrix* (*Вид → Панели инструментов → Матрица*).

2. Обратная матрица в матричном уравнении вводится кнопкой x^{-1}, расположенной на той же панели инструментов.

3. Матричное уравнение должно быть расположено не выше исходных данных.

Преимуществом способа итераций является то, что он позволяет решать системы нелинейных уравнений.

Пример.

$x_1 := 0 \qquad x_2 := 0 \qquad x_3 := 0$

$$\text{Given}\quad 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = 6 - 1.5\cdot\left(x_3\right)^2$$

$$\left(x_2\right)^3 + 5\cdot x_3 = 5$$

$$x_1\cdot x_2 + x_3 = e^{x_3}$$

$$R := \text{Find}\left(x_1, x_2, x_3\right) \qquad R = \begin{pmatrix} 0.981 \\ 1.252 \\ 0.607 \end{pmatrix}$$

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Решить систему линейных уравнений, таблица 2, способом итераций и матричным способом.

Таблица 2

Вар. №	Система	Вар. №	Система
1	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+2y+3z+4v=1 \\ -2x+y+3z+5v=0 \\ 10x+8y-9z-3v=3 \\ x+2y+z+2v=4 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x+y+z+v=1 \\ 4x-6y+8z-7v=-4 \\ x+8y+5z-3v=4 \\ 2x+y+z+2v=5 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 5x+y+3z+2v=-6 \\ -3x+8y+z+4v=1 \\ 6x+2y-4z+3v=0 \\ -x+y-z+v=10 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 9x+8y-6z-5v=4 \\ -3x-y+z+2v=-3 \\ 4x+5y+6z+7v=8 \\ x+y+2z+3v=20 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x+6y+z+v=3 \\ x+4y-5z+v=30 \\ -4x+6y+8z+2v=10 \\ -3x+3y+2z+v=28 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 7x+9y+9z+v=18 \\ x+2y-z+2v=2 \\ 7x+3y+3z+9v=5 \\ 5x+4y+2z+v=3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x+2y+3z+4v+5w=6 \\ 5x+4y+3z+2v+w=0 \\ x+y-3z+7v-7w=8 \\ 4x+2y+2z+v+8w=-9 \\ 10x+5y+6z-v-w=0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} -x+7y+4z+7v-3w=13 \\ x+y+z+v+w=3 \\ 3x+5y+7z+v+9w=-1 \\ x+9y+9z+5v+3w=19 \\ 4x+5y+6z+7v+8w=0 \end{cases}$

Продолжение таблицы 2

Вар. №	Система	Вар. №	Система
15	$\begin{cases} 10x+3y+6z+9v+7w=1 \\ 6x+2y+4z-8v+10w=10 \\ -x-2y-3z+4v+5w=-1 \\ 4x+6y+8z+2v+11w=-10 \\ x-2y+3z-4v+5w=1 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -3x+7y-2z+7v+-3w=-5 \\ 6x-y+5z+6v-3w=-10 \\ 8x+3y+z+9v+3w=6 \\ 2x+8y+2z+10v+6w=-6 \\ -2x+8y+3z-5v+4w=1 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x-5y+3z-5v-3w=8 \\ 7x+3y+z+v+w=5 \\ 4x+2y-6z-5v+6w=-11 \\ 4x-y+2z+7v-4w=5 \\ -4x+7y-6z-5v-4w=-6 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 4x-7y+3z-6v+7w=4 \\ -3x+8y-3z-v-4w=10 \\ -3x+7y+7z-6v-4w=10 \\ 5x-4y-7z-5v-2w=-8 \\ -6x-4y-5z+6v-4w=2 \end{cases}$
19	$\begin{cases} -5x-5y+3z-v=1 \\ 7x-5y+5z-4v=-1 \\ 5x-5y+4z-3v=11 \\ 3x+4y-5z+6v=2 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -3x+4y+4z+2v=2 \\ 6x+4y+7z+3v=-7 \\ 9x+6y+5z-v=10 \\ -x-5y+8z-4v=12 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 8x-2y-5z+6v=-11 \\ 3x-6y+4z-5v=-8 \\ -3x+9y+4z+v=15 \\ x+2y+5z+3v=11 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x+5y+13z-3v=1 \\ -4x+13y-6z-6v=15 \\ -4x+11y+8z-7v=6 \\ 8x-2y-3z=15 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x-8y+4z+4v=18 \\ -4x-8y-6z+9v=-2 \\ 8x+6y+3z-5v=19 \\ 7x-7y+5z-6v=-2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 7x+11y+3z+8v=-5 \\ -4x+9y+10z+5v=21 \\ 5x-3y+9z+7v=10 \\ -6x+10y-2z+2v=-5 \end{cases}$
25	$\begin{cases} -8x-2y+4z=13 \\ 10x+2y+8z=7 \\ 2x+8y+5z=-6 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x+3y+8z=3 \\ -4x+2y+7z=20 \\ -5x-5y+7z=-6 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 9x-4y+9z=16 \\ -5x+7y-2z=6 \\ 6x+7y-5z=3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 12x+4y+2z=5 \\ 10x+2y+13z=-10 \\ 8x-4y+10z=7 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 3x+10y+6z=8 \\ 10x-6y-z=-3 \\ -2x-5y+10z=-11 \end{cases}$	30	$\begin{cases} -3x+4y+4z=12 \\ 2x+6y+4z=10 \\ 7x+3y+9z=-1 \end{cases}$

II. Линейное программирование

Исследование операций в разделе линейного программирования[1] рассматривает ряд задач (например, о планирование производства, загрузке оборудования, снабжения сырьем и проч.), суть которых сводится к нахождению оптимального плана, максимизирующего или минимизирующего целевую функцию при заданных ограничениях. В задаче о планировании производства, например, максимизируют прибыль, а в задаче о снабжении сырьем минимизируют суммарные расходы на сырье.

Если решение существует, то его можно найти с помощью функций Maximize() и Minimize().

Функции **Maximize(f, var1, var2, …)** и **Minimize(f, var1, var2, …)** возвращают значения переменных var1, var2, …, которые обеспечивают соответственно максимальное и минимальное значения функции f. Перед использованием этих функций необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и, если ограничения даны, ключевое слово **Given**.

Пример 1. Найти x_1, x_2, минимизирующие целевую функцию $z = -3x_1 - 4x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 20,\\ -x_1 + 4x_2 &\le 20,\\ x_1 &\ge 10,\\ x_2 &\ge 5. \end{aligned}$$

Решение.

Из следующего рисунка видно, что оптимальным решением является точка с координатами x_1=12, x_2 = 8, в которой достигается минимум z = –68. ***Внимание!*** На рабочем листе определены переменные x1, x2, а не элементы x_1, x_2 массива x.

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad z(x1, x2) := -3 \cdot x1 - 4 \cdot x2$ <<=== Задание начальных приближений и целевой функции z().

Given

$x1 + x2 \le 20$

$-x1 + 4x2 \le 20$ <<=== Задание ограничений.

$x1 \ge 10$

$x2 \ge 5$

$r := \text{Minimize}(z, x1, x2)$

$r = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad z(r_0, r_1) = -68$ <<=== Решение.

Пример 2. Найти такие $x_1, x_2 \ge 0$, что

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 360,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 240, \end{aligned}$$

[1] Слово «программирование» заимствовано из зарубежной литературы и попросту означает «планирование».

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 180,\\
x_1 + x_2 + x_3 &\le 170,\\
x_3 &= 30
\end{aligned}
$$

и функция $w = 15x_1 + 22x_2 + 19x_3$ принимает максимальное значение.

Решение.

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0 \qquad w(x1, x2, x3) := 15\cdot x1 + 22\cdot x2 + 19\cdot x3$

Given

$2\cdot x1 + 3\cdot x2 + 2\cdot x3 \le 360 \qquad x1 + 2\cdot x2 + 3\cdot x3 \le 240 \qquad x1 + x2 + 2\cdot x3 \le 180$

$x1 + x2 + x3 \le 170 \qquad x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0 \qquad x3 = 30$

$X := \text{Maximize}(w, x1, x2, x3)$

$$X = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad w(X_0, X_1, X_2) = 2.58 \times 10^3$$

Пример 3. Найти такие $x_1, x_2 \ge 0$, что

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\le 4,\\
x_1 - 2x_2 &\le 2,\\
x_1 + x_2 &\le 5,
\end{aligned}
$$

и функция $f = -3x_1 + x_2$ принимает минимальное значение.

Решение. На следующем рисунке условия сформулированы в матричном виде.

Системная переменная ORIGIN задает нижнюю границу индексации; по умолчанию – равна нулю. Не придав ей единичное значение, нам пришлось бы нумеровать элементы массива с нуля: $f(x) := -3x_0 + x_1$.

$\text{ORIGIN} := 1$

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad f(x) := -3\cdot x_1 + x_2 \qquad x := (0 \;\; 0)^T$$

Given

$M\cdot x \le v \qquad x \ge 0$

$$P := \text{Minimize}(f, x) \qquad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(P) = -7$$

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

Найти значения переменных $x_1, \ldots, x_n \ge 0$, при которых, с учетом ограничений, целевая функция w приобретает экстремальное значение. Вывести значение функции.

Таблица 3

Вар. №	Условия	Вар. №	Условия
1	$3x_1 + 4x_2 \le 1700,$ $2x_1 + 5x_2 \le 1600,$ $w = 2x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max.$	2	$2x_1 + 4x_2 \le 9,$ $3x_1 + x_2 \le 6,$ $w = -6x_1 - 2x_2 \Rightarrow \min.$
3	$x_1 - x_2 \ge 1,$ $x_2 \le 2,$ $w = x_1 + x_2 \Rightarrow \min.$	4	$-x_1 + 3x_2 \le 10, \quad x_1 + x_2 \le 6,$ $x_1 - x_2 \le 3, \quad x_1 + 4x_2 \ge 4,$ $w = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max.$
5	$x_1 + 2x_2 \le 11, \quad x_1 + x_2 \le 6,$ $x_1 - x_2 \le 2, \quad 2x_1 - 4x_2 \le 3,$ $w = -2x_1 - x_2 \Rightarrow \min.$	6	$x_1 + x_2 \ge 1, \quad 2x_1 + x_2 \le 3,$ $x_1 - x_2 \le 1, \quad x_1 + x_2 \le 6,$ $w = -3x_1 - x_2 \Rightarrow \min.$
7	$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1,$ $3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 2,$ $w = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \Rightarrow \max.$	8	$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$ $0{,}06x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 \le 0{,}03,$ $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 3{,}25$ $w = 30x_1 + 30x_2 + 45x_3 \Rightarrow \min.$
9	$2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6,$ $x_1 + 5x_2 + 6x_3 \ge 9,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 4,$ $-x_1 + x_3 \le 2,$ $w = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \Rightarrow \min.$	10	$0{,}25x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \le 0,$ $0{,}5x_1 - 12x_2 - 0{,}5x_3 + 3x_4 \le 0,$ $+ x_3 \le 1,$ $w = -0{,}75x_1 + 20x_2 - 0{,}5x_3 +$ $+ 6x_4 \Rightarrow \min.$
11	$-x_2 + 4x_3 \ge 1,$ $-x_1 + 5x_2 \le 1,$ $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9,$ $w = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \Rightarrow \min.$	12	$x_1 + 3x_2 \ge 8,$ $3x_1 + 4x_2 \ge 19,$ $3x_1 + x_2 \ge 7,$ $w = 50x_1 + 25x_2 \Rightarrow \min.$
13	$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 50,$ $3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25,$ $w = 8x_1 + 19x_2 + 7x_3 \Rightarrow \max.$	14	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15,$ $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120,$ $3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100,$ $w = -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 \Rightarrow \min.$
15	$x_1 - x_2 \le 4, \quad x_1 - 2x_2 \le 2,$ $x_1 + x_2 \le 5,$ $w = -x_1 + x_2 \Rightarrow \min.$	16	$x_1 + 2x_2 \ge 6, \quad 2x_1 + x_2 \ge 6,$ $7x_1 + 8x_2 \le 56,$ $w = x_1 + x_2 \Rightarrow \min.$

Продолжение таблицы 3

Вар. №	Условия	Вар. №	Условия
17	$-x_1+10x_2+x_3=40,$ $x_1+x_2+x_4=20,$ $w=10x_1-111x_2\Rightarrow\min.$	18	$x_1+2x_2+4x_3\le 360,$ $2x_1+4x_2+2x_3\le 520,$ $x_1+x_2+2x_3\le 220,$ $w=9x_1+11x_2+15x_3\Rightarrow\max.$
19	$x_1+x_2\le 6,$ $4x_1+11x_2\le 44,$ $w=-2x_1-5x_2\Rightarrow\min.$	20	$x_1+3x_2+8x_3+4x_4\le 90,$ $2x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 80,$ $w=-x_1-2x_2-4x_3-3x_4\Rightarrow\min.$
21	$3x_1-2x_2+4x_3\ge 8,$ $x_1+2x_2+x_3\le 9,$ $2x_1+x_2\le 6,$ $w=3x_1+x_2+2x_3\Rightarrow\min.$	22	$x_1+5x_2+x_3\ge 7,$ $2x_1+x_2+3x_3\ge 9,$ $3x_1+2x_2+5x_3\ge 14,$ $w=7x_1+4x_2+11x_3\Rightarrow\min.$
23	$3x_1+3x_2+x_3\ge 7,$ $x_1+2x_2+5x_3\ge 9,$ $3x_1+x_2+2x_3\ge 14,$ $w=11x_1+14x_2+15x_3\Rightarrow\min.$	24	$3x_1+5x_2\ge 18,$ $x_1+9x_2\ge 30,$ $2x_1+7x_2\ge 27,$ $w=11x_1+44x_2\Rightarrow\min.$
25	$2x_1+x_2+4x_3\ge 22,$ $x_1+x_2+x_3=9,$ $x_1+2x_2+3x_3\le 18,$ $w=5x_1+7x_2+13x_3\Rightarrow\min.$	26	$x_1+3x_3\ge 3,$ $x_2+2x_3\ge 5,$ $w=4x_1+6x_2+18x_3\Rightarrow\min.$
27	$x_1\le 4,$ $x_2\le 6,$ $3x_1+2x_2\le 18,$ $w=3x_1+5x_2\Rightarrow\max.$	28	$3x_1+4x_2+x_3\ge 7,$ $x_1+2x_2+x_3=6,$ $x_3\le 4,$ $w=x_1-4x_2-3x_3\Rightarrow\max.$
29	$5x_1-x_2\le 6,$ $3x_1+x_2=10,$ $w=10x_1-4x_2\Rightarrow\max.$	30	$-3x_1+4x_2+4x_3\ge 12,$ $2x_1-6x_2+4x_3\ge 10,$ $7x_1+3x_2-9x_3\ge -1,$ $w=x_1+2x_2+3x_3\Rightarrow\min.$

III. Системы линейных дифференциальных уравнений

В ряде задач электротехники, автоматического управления и проч. переходные процессы описываются с помощью линейных дифференциальных уравнений высших порядков, а в задачах исследования операций, связанных с системами массового обслуживания, – с помощью систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение линейных дифференциальных уравнений (ДУ) n-ного порядка осуществляется путем приведения этих ДУ к системам из n линейных ДУ первого порядка. Для получения решения данных систем в пакете Mathcad предусмотрена специальная функция rkfixed().

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - \frac{3}{t}y'' + \frac{6}{t^2}y' - \frac{6}{t^3}y = \sqrt{t} \qquad (2)$$

(т.е. найти зависимость y(t)) при следующих начальных условиях:

$$t_0 = 1, \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = -3, \quad y''(t_0) = 2. \qquad (3)$$

Решение. Представляем уравнение (2) в виде системы ДУ первого порядка (4). Для этого вводим следующие обозначения

$y_0 = y, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y''$

и записываем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dt} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{3}{t}y_2 - \dfrac{6}{t^2}y_1 + \dfrac{6}{t^3}y_0 + \sqrt{t} \end{cases} \qquad (4)$$

Далее в Mathcad определяем (рисунок 6) функцию F(t,y) как вектор-столбец (матрица из трех строк и одного столбца), содержащий правые части системы (4); определяем t1, t2 – начальное и конечное значения диапазона, пробегаемого независимой переменной t; n – число шагов интегрирования; Y – вектор, содержащий начальные значения (3).

$$F(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dfrac{3}{t}\cdot y_2 - \dfrac{6}{t^2}\cdot y_1 + \dfrac{6}{t^3}\cdot y_0 + \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$t1 := 1 \qquad t2 := 2 \qquad n := 100 \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad j := 0..100$$

Рисунок 6

Внимание! В определении функции F(t,y) участвуют не переменные y0, y1, y2, а элементы массива y_0, y_1, y_2. А начальный и конечный моменты времени (рисунки 6, 7) – напротив: определены не элементами массива t_1, t_2 , а переменными t1, t2.

Затем (рисунок 7) в переменную Z записываем значение, возвращаемое функцией rkfixed().

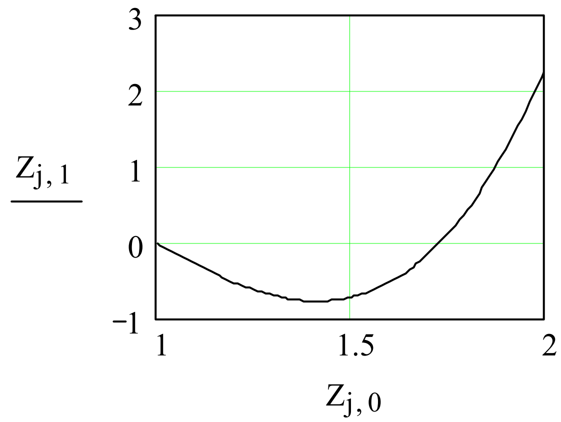
Z представляет собой двумерный массив, имеющий четыре столбца и (n+1) строк. Число столбцов на единицу больше строк в системе (4). Нулевой столбец содержит значения независимой переменной на каждом шаге интегрирования, первый и последующие столбцы – значения искомых переменных, содержащихся в левой части системы (4), т.е. соответственно y_0, y_1, y_2.

На графиках представлены зависимости y(t) и y'(t). Выражения «j,0», «j,1» и «j,2» находятся в поле нижнего индекса переменной Z.

$$Z := \mathrm{rkfixed}(Y, t1, t2, n, F)$$

Z =

	0	1	2	3
0	1	0	-3	2
1	1.01	-0.03	-2.979	2.25
2	1.02	-0.06	-2.955	2.501
3	1.03	-0.089	-2.929	2.752
4	1.04	-0.118	-2.9	3.003
5	1.05	-0.147	-2.869	3.254
6	1.06	-0.175	-2.835	3.506
7	1.07	-0.204	-2.799	3.758
8	1.08	-0.231	-2.76	4.011
9	1.09	-0.259	-2.718	4.264
10	1.1	-0.286	-2.674	4.517
11	1.11	-0.312	-2.628	4.771
12	1.12	-0.338	-2.579	5.025
13	1.13	-0.364	-2.527	5.279
14	1.14	-0.389	-2.473	5.534
15	1.15	-0.413	-2.417	5.788



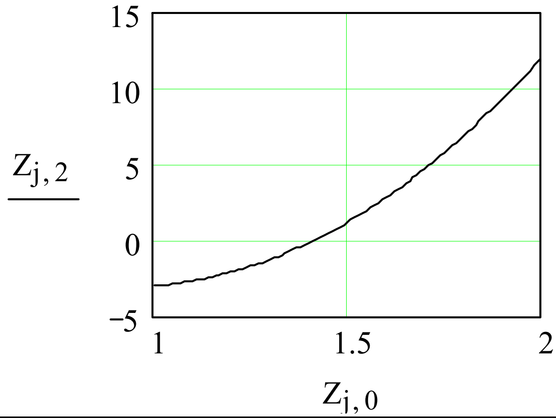


Рисунок 7

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ № 3

Построить график зависимости y(t) на отрезке [t_0, t_1] для уравнений, приведенных в следующей таблице.

Таблица 4

№	Уравнение	Начальные условия*					t_1
		$y(t_0)$	$y'(t_0)$	$y''(t_0)$	$y'''(t_0)$	t_0	
1	$y''+3y'+2y=3e^{2t}$	–1	–2			0	1,5
2	$y''+y=\cos t$	1	1			1	10
3	$y''+y'-2y=2e^{-2t}+e^{2t}$	–1	1			0,5	2
4	$y''-2y'-3y=t^2$	–0,1	–0,1			–1	0
5	$y''+4y'= t+e^{-4t}$	–1	0,5			–1	1
6	$y''+9y=4 \sin 3t + t$	0	4			–0,5	5
7	$y''+y'=t \sin t$	0	0			0	20
8	$y'- y \operatorname{tg} t = \operatorname{ctg} t$	–5				0,1	1,5
9	$t\cdot y'+y = y^2\cdot\ln t$	1				0,9	5
10	$y'-t\cdot y+y^3\cdot\exp(-t^2) = 0$	–0,1				0	2
11	$2y''' + 4t\cdot y'' - \frac{6}{t^2}y' + y = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$	20	–6	–1		0,1	13
12	$-y'''+3y''-16\cdot t\cdot y'-y/7 = \cos t$	2	0	0		0	4
13	$y''' + \sin(t)\cdot y'' - 10\cdot e^{-t}\cdot y' + 3y = \frac{\cos(t)}{t+1}$	0	0	0		0	10
14	$y'''+2y''-3y'+4y=5$	–20	10	–20		–2	6
15	$\frac{y'''}{t} - y'' - y' + t\cdot y = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$	1	1	1		0	2
16	$y''' - e^{\cos(t)}\cdot y' + 2y = \lvert\cos(t)\rvert$	0	0	0		0	10
17	$y''' + y'' + t\cdot y = \sin(\cos(t))$	0	–1	1		0	6
18	$e^t\cdot y'''-3y''-2y'= e^{-t}$	–10	–3	2		0	4
19	$y''' + \sqrt[3]{t}\cdot y'' - \sqrt{t}\cdot y' - t\cdot y = 2$	0	–1	0		0	3,5
20	$t^3y''' - 3t^2y'' + 6ty' - 6y = 0$	2	–10	0		1	2
21	$y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$	0,5	–1	–1	1	2	5
22	$y^{IV} + 2y'' + y = \cos t$	1	0	0	1	0	15
23	$y^{IV} - y = 5\cdot e^t \sin t$	0	–2	–2	0	0	3
24	$y^{IV} - 8y' = te^{2t}$	0	0,1	–1	0	0	3
25	$y^{IV} - 5y''' + 6y'' = 2\sin 2t + t^2e^{3t} + e^{-2t}\cos 3t$	–1	–0,5	–3	0	0	1,1
26	$y''' + 5y'' + 4y' = t^2 + te^{-4t} + t^2e^{-t} + \sin 2t$	1	–3	–4		0	6
27	$(t^2-2t+2)y'''-t^2y''+2ty'-2y=0$	0	–1	1		0	4

Продолжение таблицы 4

№	Уравнение	Начальные условия*					t_1
		$y(t_0)$	$y'(t_0)$	$y''(t_0)$	$y'''(t_0)$	t_0	
28	$(t+2)^3y'''+9(t+2)^2y''+$ $+18(t+2)y'+6y = \ln(t+2)$	0	–1	1		0	10
29	$y^V-10y'''+9y'=0;\ y^{IV}(t_0)=1$	3	–1	0	–1	0	2,5
30	$y^V+y^{IV}+2y'''+2y''+y'+y=0;$ $y^{IV}(t_0)=-1$	0	1	0	–1	0	20

*Для вариантов №№29, 30 одно из начальных условий см. во втором столбце.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Лабораторные задания.
2. Реализация заданий в Mathcad.

Лабораторная работа № 3

СУММИРОВАНИЕ И ПРОИЗВЕДЕНИЕ РЯДОВ

Суммирование и произведение рядов можно осуществлять либо используя шаблоны суммирования и произведения (кнопки которых находятся на панели *View → Toolbars→Calculus* (*Вид→ Панели инструментов → Калькуляция*)), либо шаблоны программированя (кнопки расположены на панели *View → Toolbars→Programming* (*Вид→ Панели инструментов → Программирование*)). Средства инструментальной панели Программирование рассмотрены в приложении 5.

Пример 1. Вычислить частичную сумму ряда

$$s = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots,\ |x| \le 1,$$

с использованием шаблонов суммирования и произведения.

Решение.

$x := 1 \quad n := 3$

$$s := x + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \prod_{k=1}^{i} \frac{2\cdot k - 1}{2\cdot k} \cdot \frac{x^{2\cdot i+1}}{2\cdot i + 1} \qquad s = 0.864$$

Пример 2. Вычислить частичную сумму ряда средствами программирования.

Решение. Ниже показана программная реализация. Суммирование прекращается, когда модуль текущего члена ряда станет меньше заданной точности ε, причем данный член ряда в сумму не входит.

$$
f1(x,\varepsilon) := \left|\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
s \leftarrow 0 \\
s1 \leftarrow x \\
\text{while } |s1| > \varepsilon \\
\quad \left|\begin{array}{l}
s \leftarrow s + s1 \\
i \leftarrow i + 1 \\
s1 \leftarrow (-1)^{i} \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{i} \frac{2\cdot k - 1}{2\cdot k} \cdot \frac{x^{2\cdot i+1}}{2\cdot i + 1}
\end{array}\right. \\
s
\end{array}\right.
\qquad f1\left(1, \frac{1}{10}\right) = 0.833
$$

Операторы программы располагаются справа от вертикальной линии и выполняются сверху вниз. Один из операторов – цикл While, тело которого (короткая линия) состоит из трех операторов. (***Внимание!*** Оператор While вводится не с клавиатуры, а кнопкой, расположенной на панели инструментов Программирование). Цикл выполняется, пока модуль очередного слагаемого s1 превышает заданную точность.

Значение, возвращаемое функцией, задается переменной, расположенной в конце программы (самая нижняя позиция линии – сумма s).

Вертикальная линия, на которой располагаются операторы программы, появляется при нажатии кнопки Add Line на панели Программирование. Добавление позиций на линии осуществляется повторными нажатиями кнопки Add Line.

При большом объеме вычислений или при зацикливании время вычислений может стать слишком большим. Прерывание процесса вычислений, обозначаемого мигающей лампочкой возле курсора, осуществляется клавишей Esc. ◙

Пример 3. Далее приводится программа для вычисления членов указанного выше ряда. Функция f2(x, ε) возвращает массив искомых членов ряда. ◙

$$
f2(x,\varepsilon) := \left|\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
s_i \leftarrow x \\
\text{while } |s_i| > \varepsilon \\
\quad \left|\begin{array}{l}
i \leftarrow i + 1 \\
s_i \leftarrow (-1)^{i} \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{i} \frac{2\cdot k - 1}{2\cdot k} \cdot \frac{x^{2\cdot i+1}}{2\cdot i + 1}
\end{array}\right. \\
s
\end{array}\right.
\qquad f2(1, 0.1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.167 \\ 0.015 \end{pmatrix}
$$

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Используя шаблон $\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ – суммирование (а возможно и $\prod_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ – произведение) найти частичную сумму ряда таким же образом, как в примере 1.

1. $s=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x|<10$.

2. $s=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<10$.

3. $s=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, $|x|<1$.

4. $s=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, $|x|<1$.

5. $s=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$, $|x|<10$.

6. $s=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$, $|x|<10$.

7. $s=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$, $|x|<10$.

8. $s=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$, $|x|<10$.

9. $s=2\cdot\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right]$, $|x|<1$.

10. $s=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots$, $|x|<1$.

11. $s=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}$, $|x|<5$.

12. $s=x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$.

13. $s=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$, $|x|<10$.

14. $s=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots$, $|x|<10$.

15. $s=1-\frac{2\cdot 3}{2}x+\frac{3\cdot 4}{2}x^2-\frac{4\cdot 5}{2}x^3+\ldots,\qquad |x|<0{,}9.$

16. $s=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots,\quad |x|<1.$

17. $s=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots,\quad |x|<1.$

18. $s=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\ldots,\quad |x|<1.$

19. $s=1+\frac{2x}{3^2\cdot\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\cdot\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\cdot\sqrt{3^3}}+\ldots,\quad |x|<\frac{\sqrt{3}}{2}.$

20. $s=4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right).$

21. $s=1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\ldots,\quad |x|<\frac{\sqrt{5}}{2}.$

22. $s=1-\frac{x}{5\cdot\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\cdot\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\cdot\sqrt{4}}+\ldots,\quad |x|<2.$

23. $s=1-\frac{x^2}{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\cdot\sqrt{4}}+\ldots,\quad |x|<\sqrt{3}.$

24. $s(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right].$

25. $s(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right).$

26. $s(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots\right)$

27. $s(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

28. Для заданных A, t, n, q, ω вычислить $s(t)=\frac{A}{q}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\pi/q)}{k\pi/q}\cdot\cos k\omega t\right].$

29. $s(x)=\frac{x}{3}-\frac{1}{7}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{11}\cdot\frac{x^5}{5!}\mp\ldots,\qquad |x|<10.$

30. $s(x) = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{9} \cdot \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{13} \cdot \frac{x^6}{6!} \mp \ldots, \qquad |x| < 10.$

Задание 2.

I. В соответствии с примером 2 с помощью средств из панели Программирование создать функцию, возвращающую частичную сумму ряда, указанного в предыдущем задании. Суммирование прекращается, как только модуль очередного слагаемого станет меньше заданной точности.

II. В соответствии с примером 3, пользуясь средствами программирования, создать функцию, возвращающую массив членов указанного выше ряда.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Лабораторные задания.
2. Реализация заданий в Mathcad.

Список литературы

1.

2. Кудрявцев Е. М. Mathcad 8. – М.: ДМК, 2000. – 320 с.

Структура документа Mathcad

Любой документ Mathcad состоит из отдельных блоков. Блоки могут быть различных типов: тексты (комментарии), формулы, графики таблицы и т.д. В документ Mathcad можно внедрять графические объекты, выполненные в других приложениях.

Каждый блок занимает на рабочем листе область прямоугольной формы и блоки не должны взаимно перекрываться (хотя небольшое перекрытие несущественно).

Расположение блоков в документе, кроме текстового и внедренных рисунков, имеет принципиальное значение. Они выполняются слева направо и сверху вниз. Указанный порядок выполнения блоков означает, что, например, при построении графика функции или таблицы сначала должны выполняться блоки, задающие саму функцию и пределы изменения аргумента, а уже затем блок, задающий вывод таблицы или построение графика функции. Поэтому, если в формуле используются переменные, не определенные ранее (выше и левее по тексту) то выдается сообщение об ошибке, и эти переменные окрашиваются в красный цвет.

Очередной создаваемый блок начинается с позиции, обозначенной визиром в виде красного крестика. Этот визир можно перемещать навигационными клавишами, (→, ←, ↑, ↓), клавишами табуляции, пробела или устанавливать мышью.

Если перемещаемый визир попадает в формульный блок или блок графика, то визир превращается в синий уголок, а если в текстовый блок, то визир имеет вид черной вертикальной линии. Редактируемый блок обозначается прямоугольной рамкой.

К существующим блокам можно применять стандартные действия редактирования: выделение, копирование, перемещение, вставка, удаление.

Текстовый редактор

Блок комментариев вводится с помощью текстового редактора. Для этого помещаем курсор в то место окна редактирования, откуда должен начинаться текст, и выбираем пункт меню *Insert → Text Region* (*Вставка → Область текста*) либо вводим символ ″ (двойные кавычки), после чего появляется прямоугольник (шаблон текстовой области) с текстовым маркером внутри. В текстовой области можно выбирать шрифт, как это изображено на рисунке П4, и даже форматировать абзацы.

Приложение 2

Редактор формул

Для входа в редактор формул достаточно начать ввод имени переменной или ввести шаблон формулы (см. далее). Для выхода из редактирования текущего формульного блока нажмите клавишу табуляции или щелкните мышкой по пустому полю окна редактирования.

Редактируемый блок можно перемещать в пределах листа, захватив за контурную рамку левой кнопкой мыши.

Mathcad различает прописные и строчные буквы.

Греческие буквы в именах переменных или функций вводят с панели инструментов: *View → Toolbars→Greek* (в русифицированной версии – *Вид→ Панели инструментов →Грек*).

Внимание! Число π вводим с панели инструментов *View → Toolbars→Calculator* (в русифицированной версии – *Вид→ Панели инструментов → Калькулятор*) либо – комбинацией клавиш Ctrl+Shift+p.

Десятичный разделитель – точка.

Ниже приводятся обозначения, назначение и порядок ввода шаблонов формул.

▪·▪ **Умножение.** Ввести символ «*» (звездочка) либо нажать кнопку на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator* (в русифицированной версии – *Вид→ Панели инструментов → Калькулятор*).

$\frac{▪}{▪}$ **Деление.** Ввести символ «/» либо нажать кнопку на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator* (*Вид→ Панели инструментов → Калькулятор*).

▪ + ▪ **Сложение.** Ввести символ «+» либо нажать кнопку на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator*.

a – ▪ **Вычитание.** Ввести символ «–» (минус) либо нажать кнопку на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator*.

▪ := ▪ **Присваивание.** Можно ввести несколькими способами:

- с помощью соответствующей кнопки на панели, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator*;
- ввести символ двоеточия «:» после идентификатора переменной или после скобки, закрывающей список аргументов определяемой пользователем функции. Например, для ввода N:=5 или f(x):=2·x на клавиатуре набираем соответственно:

N:5 или **f(x):2*x**

Внимание! Перед двоеточием нельзя ставить символ пробела. Если это сделать, то блок из формульного превратится в текстовый;

- ввести символ «=» после идентификатора, не определенного ранее;

o ввести символ двоеточия «:» на незанятой области документа и заполнить предлагаемые пустые позиции.

= **Вывод на экран вычисленного значения.** Ввести символ «=» либо нажать кнопку [=] на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator*. Выводит на экран значение, вычисленное по формуле, заданной в текущем операторе, либо значение переменной, определенной ранее. Примеры:

$$\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}=1.061$$

N=5

Если интересующая нас переменная является массивом, то при большом числе его элементов будут выведены лишь первые 16 строк. В этом случае после щелчка мышкой по таблице появляется бегунок прокрутки.

Внимание! Если переменная ранее не определена, то символ «=» после ее имени будет интерпретирован как **присваивание** и будет произведена подстановка «:=».

$\blacksquare^{\blacksquare}$ **Возведение в степень.** Ввести символ «^» либо нажать кнопку [x^Y] на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Calculator*.

$\blacksquare_{\blacksquare}$ **Нижний индекс (создание массива).** Ввести символ «[» либо нажать кнопку [x_n] на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Matrix* (*Вид → Панели инструментов → Матрица*). Например, чтобы ввести x_j , необходимо набрать на клавиатуре:

x[j

Выход из редактирования индекса осуществляется нажатием навигационной клавиши «→».

$\blacksquare..\blacksquare$ **Перечисление (задает перечисление «от и до»).** Ввести символ «;» либо нажать кнопку [m..n] на панели инструментов, доступной через меню *View → Toolbars→Matrix*. Например, оператор t:=1..7 задает изменение переменной t от 1 до 7 с шагом единица.

$\sin(\blacksquare)$ $\ln(\blacksquare)$ $\sqrt{\blacksquare}$ **Функции.** Все функции можно ввести с клавиатуры или из списка функций, доступного через меню *Insert → Function* (*Вставка → Функция*) а некоторые – пользуясь кнопками, расположенными на панели инструментов *View → Toolbars→Calculator*. Описание некоторых функций приведено ниже.

Приложение 3

Двумерные графики

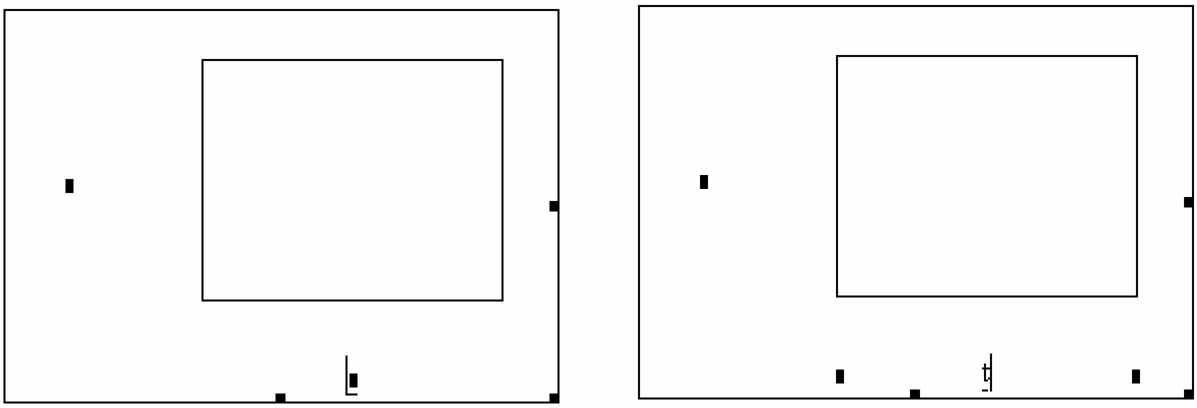
I. Создание графика

Вставка шаблона для построения графика в место курсора осуществляется выбором пункта меню: *Insert* → *Graph* → *X-Y Plot* (*Вставка* → *График* → *Точка X-Y*) или вводом символа @. При этом появляется шаблон с двумя незаполненными метками, рисунок П1а. После ввода переменной в предлагаемую позицию на оси абсцисс появляются еще две метки, задающие диапазон отображаемых значений по данной оси, рисунок П1б.

Если метки диапазона оставить незаполненными, то диапазон значений, выводимых по оси абсцисс:

- определяется диапазоном изменения переменной, если она была определена ранее;
- от минус 10 до плюс 10, если данная переменная не была определена ранее, рисунок П2а.

Метки диапазона по оси ординат обычно оставляют незаполненными, и происходит автоматическое вычисление его так, чтобы отображался весь график (см. рисунок 1, лабораторная работа №1). Но иногда график отображается не полностью диапазон необходимо указать.



а) б)

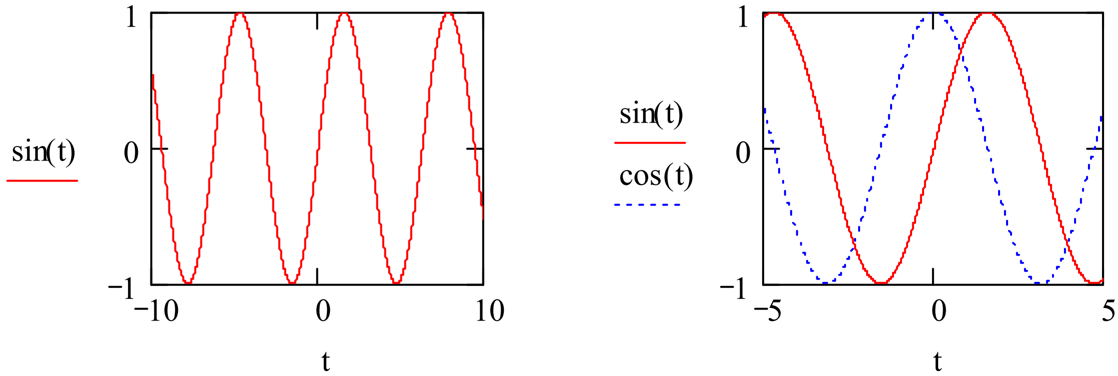
Рисунок П1

Перемещение по меткам осуществляется навигационными клавишами ←, →, клавишей табуляции или мышкой. Выход из режима редактирования блока графика осуществляется щелчком мышки вне блока графика; при этом пропадает рамка, ограничивающая блок. Повторный вход в режим редактирования блока осуществляется перемещением на блок курсора (красного перекрестия) либо щелчком мыши по блоку.

Можно изменять размеры редактируемого блока, захватив левой клавишей мыши за черные прямоугольники, расположенные на рамке, ограничивающей блок.

На одном графике можно отображать несколько зависимостей. Для этого выводимые переменные перечисляются через запятую. То есть в поле средней метки по оси ординат (рисунок П2б) вводим:

sin(t),cos(t)



а) б)

Рисунок П2

Перечисление аргументов возможно и по оси абсцисс, рисунок П3.

II. Изменение параметров графика

Двойной щелчок по блоку графика (или щелчок правой кнопкой с выбором пункта Format… (Формат…)) открывает диалоговое окно изменения параметров двумерного графика (***Formatting Currently Selected X-Y Plot***). Данное окно имеет четыре вкладки.

$$x := \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 0 \\ 1.5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -0.112 \\ -0.811 \\ 0.009 \\ 1.065 \\ 0.221 \end{pmatrix}$$

$$t := -3, -2.99 .. 3$$

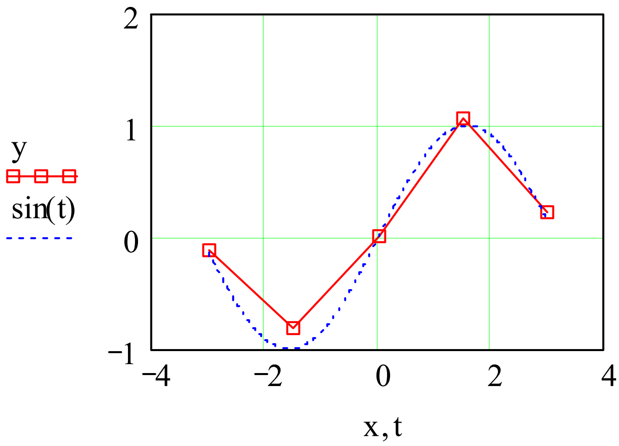


Рисунок П3

Во вкладке **X-Y Axes (Оси X-Y)** доступны следующие флажки выбора режимов построения графика:

- *Log Scale (Логарифм. шкала)* – установка по оси логарифмической шкалы;
- *Grid Lines (Вспом. линии)* – установка на оси вспомогательных линий (координатной сетки);
- *Numbered (Нумерация)* – нумерация оси;
- *Autoscale (Автомасштаб)* – автомасштабирование оси;
- *Show Markers (Показать Метки)* – установка по оси режима показа меток;
- *Auto Grid (Авто сетка)* – установка по оси автосетки (автоматическая установка шага координатной сетки);
- *Number of Grids (Размер сетки)*

– установка по оси размера сетки. Устанавливает число отрезков, разделяемых линиями сетки. Режим активен при отключенном режиме *Auto Grid*.

На этой же вкладке содержится ряд переключателей выбора стиля осей графика **Axes Style (Стиль осей графика)**:

- *Boxed (Ограниченная область)* – выводит график в рамке без осей;
- *Crossed (Пересечение)* – выводит график без рамки с осями;
- *None (Без границ)* – выводит график без рамки и без осей;
- *Equal Scales (Равные масштабы)* – установка по осям равных масштабов.

Во вкладке **Traces (Трассировки)** доступны следующие пункты выбора режимов построения графика:

- *Legend Label (Лэйба)* – имя зависимости в легенде;
- *Symbol (Символ)* – символ, обозначающий отсчет;
- *Line (Строк)* – тип линии (активен, если в пункте *Тип* выбрано *lines*);
- *Color (Цвет)* – цвет графика;
- *Type (Тип)* – тип графика;
- *Weight (Вес)* – толщина графика.

На этой же вкладке расположены два флажка:

- *Hide Arguments (Скрывание аргу)* – скрыть аргументы;
- *Hide Legend (Спрятать лег)* – скрыть легенду.

III. Просмотр фрагментов графика

Щелчок правой кнопкой в пределах блока графика и выбор пункта **Zoom…** (**Приближение…**) открывает диалоговое окно изменения масштаба двумерного графика (**X-Y Zoom**). С его помощью можно крупным планом просмотреть фрагмент графика. Отметьте прямоугольный участок графика мышкой: нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, растяните рамку в виде штриховой линии. После этого станут активными кнопки: Zoom , Unzoom и Full View (В русифицированной версии – Масштаб+, Масштаб– и Обзор). Нажатие кнопки Масштаб+ выведет отмеченный фрагмент во все окно. Установить прежний масштаб можно нажатием Масштаб– или Обзор.

VI. Трассировка графика

Щелчок правой кнопкой в пределах блока графика и выбор пункта **Trace…** (**Трассировка**…) открывает диалоговое окно трассировки двумерного графика (**X-Y Trace**). С его помощью можно отобразить координаты, указываемые визиром. Щелчок левой кнопкой мыши в поле графика выведет перекрестие визира, а в полях ***X-Value***, ***Y-Value*** отобразятся соответствующие координаты. Навигационными клавишами ←, → можно переходить к ближайшему следующему отсчету. Чтобы передвигать визир по отсчетам с помощью мыши, нужно установить флажок ***Track Data Points (След точек данных)***. Любую из координат, отображаемых в полях ***X-Value***, ***Y-Value***, можно скопировать в буфер нажатием соответственно кнопок: Copy X , Copy Y .

Приложение 4

Некоторые функции и системные переменные

I. Логарифмические и экспоненциальные функции

log(z, b) – логарифм z по основанию b; по умолчанию параметра b логарифм вычисляется по основанию 10.

ln(z) – логарифм z по основанию e; (натуральный логарифм z).

exp(z) – экспонента, e^z.

II. Тригонометрические функции

sin(z) – синус.
cos(z) – косинус.
tan(z) – тангенс.
cot(z) – котангенс.
sec(z) – секанс.
csc(z) – косеканс.
atan(z) – обратный тригонометрический тангенс.
acot(z) – обратный тригонометрический котангенс.
asin(z) – обратный тригонометрический синус.
acos(z) – обратный тригонометрический косинус.

III. Функции комплексных чисел

arg(z) – определяет угол в радианах от действительной оси x до комплексного числа z.

Im(z) – выделяет мнимую часть комплексного числа z.

Re(z) – выделяет действительную часть комплексного числа z.

IV. Функции округления и работы с частью числа

ceil(x) – возвращает наименьшее целое число, большее или равное x. Число x должно быть вещественным:
ceil(15.7) = 16
ceil(–3.9) = –3

floor(x) – возвращает наибольшее целое число, меньшее или равное x. Число x должно быть вещественным:
floor(15.7) = 15
floor(–3.9) = –4

round(x,n) – округляет вещественное число x до n разрядов справа от десятичной точки. Если параметр n не указан, x округляется до ближайшего целого числа. Если n<0, x округляется до n разрядов слева от десятичной точки:
round(15.71346, 3) = 15.713
round(15.71346) = 16

round(1315.71346, –2) = 1.3×10^{3}

trunc(x) – возвращает целочисленную часть вещественного числа x, удаляя дробную часть:

trunk(15.7) = 15 trunk(–3.9) = –3

V. Функции решения алгебраических уравнений и систем

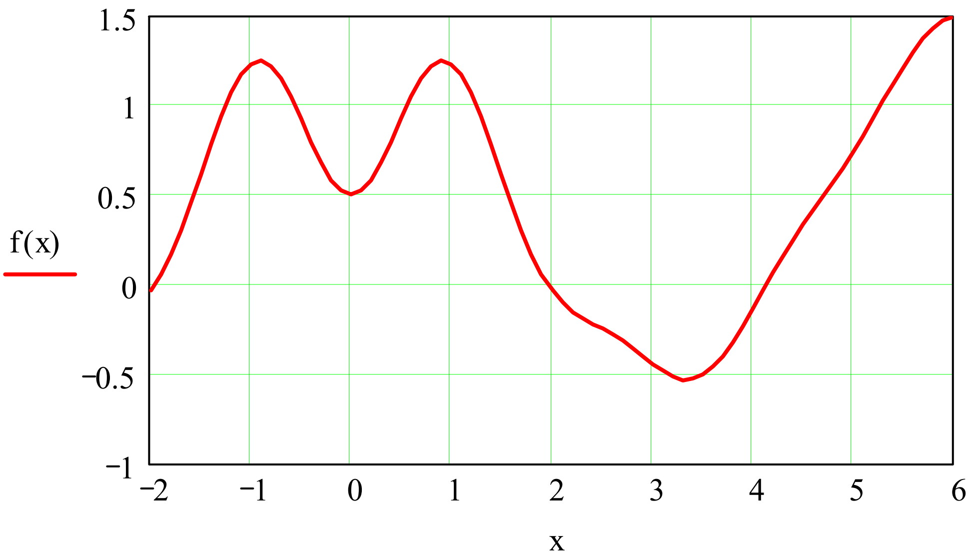
root(f(x), x) – находит корень уравнения с одним неизвестным. Возвращает значение x, при котором f(x)=0. Использование функции root требует предварительного задания начального приближения. Если исследуемая функция имеет много корней, то найденный будет зависеть от начального приближения. Если оно расположено близко к локальному экстремуму, функции f(x) то root может не найти корня.

На рисунке П4 приведен пример решения нелинейного уравнения с одним неизвестным графическим способом и с использованием функции root(f(x), x).

Решение нелинейного уравнения графически и с помощью функции root

1. Определяем функцию и получаем графическое решение уравнения f(x)=0.

$f(x) := \cos(x) - \frac{\sin(4x)}{4x} + 0.5$ $\qquad x := -2, -1.9 .. 6$



2. Вводим начальное приближение: x := 1.5

3. Получаем решение с помощью функции root: r := root(f(x), x) r = 1.952

Рисунок П4

Для начального приближения x=1,5 решение r= 1,952; для начального приближения x=5 решение r= 4,136. Для начального приближения x=0,5 функция не находит действительного корня. Последнее объясняется тем, что направление поиска выбирается, в частности, исходя из уменьшения абсолютного значения функции f(x). А координата x=0,5 находится в пределах симметричной впадины, имеющей локальный минимум с координатами x=0, y=0,5.

polyroots(v) – находит корни полинома и возвращает вектор, содержащий все его корни, коэффициенты которого находятся в v. Предварительно коэффициенты полинома должны быть представлены в виде вектора (см. пример в лабораторной работе № 1).

find(x,y,…) – возвращает значения x, y, …, удовлетворяющие ограничениям: равенствам и неравенствам, которые определены в блоке решения уравнений. Число уравнений должно равняться числу неизвестных x, y, … Когда блок решения уравнений ищет одну неизвестную, функция Find возвращает скаляр. В остальных случаях она возвращает вектор, первым элементом которого является искомое значение x, вторым – y и т.д. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной. Если система имеет несколько решений, то найденное определяется заданным начальным приближением. Примеры – в лабораторной работе № 2.

Maximize(f, var1, var2, …) возвращает значения переменных var1, var2, …, которые обеспечивают максимальное значение функции f. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и, если ограничения даны, ключевое слово **Given**. Пример – в лабораторной работе № 2.

Minimize(f, var1, var2, …) возвращает значения переменных var1, var2, …, которые обеспечивают минимальное значения функции f. Перед ее использованием необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и, если ограничения даны, ключевое слово **Given**. Пример – в лабораторной работе № 2.

Minerr(x, y, …) – возвращает значения x, y, …, наиболее близкие к решению системы уравнений. x, y, … есть скалярные переменные, значения которых ищутся в системе уравнений. Если ищется одна неизвестная, то функция **Minerr** возвращает скаляр. В остальных случаях она возвращает вектор, первым элементом которого является искомое значение неизвестной x, вторым – y и т.д. Перед использованием этой функции необходимо задать начальное приближение для каждой неизвестной и ключевое слово **Given**. Если система имеет несколько решений, то найденное определяется начальным приближением.

Пример. Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \ \mathrm{p} > 0, \mathrm{q} > 0$$

касается плоскости z=0 в точке x=0, y=0 и с плоскостью z= –1 пересечений не имеет. Поэтому функция find() найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q} \\ z = -1 \end{cases}$$

не может. Но с помощью функции Minerr находим наиболее близкое (для заданных начальных приближений) решение указанной системы:

$p := 2 \quad q := 1 \quad x := 2 \quad y := 2 \quad z := 0$

Given

$$z = \frac{x^2}{2 \cdot p} + \frac{y^2}{2 \cdot q}$$

$$z = -1$$

$$\mathrm{MinErr}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0.384 \\ -0.26 \\ -0.171 \end{pmatrix}$$

Если искать пересечение параболоида с плоскостью z=1, то функция Minerr возвращает такое же решение, как и функция Find.

V. Другие функции

if(cond,x,y) – Возвращает *x*, если логическое выражение *cond* – истинно (не ноль), иначе – возвращает *y*. *Пример:*

$f8(x) := \mathrm{if}\left(x \ge 1, x^2, -1\right) \qquad f8(2) = 4 \qquad f8(0.5) = -1$

rnd(x) – возвращает случайное число в пределах от 0 до x в соответствии с равномерным распределением. Повторный запуск генератора случайных чисел осуществляется выбором пункта меню *Math→ Calculate Worksheet* (*Математика → Калькуляция рабочей таблицы*).

VI. Системные переменные

TOL – системная переменная **–** задает погрешность численных методов (по умолчанию равна 0,001).

ORIGIN – системная переменная – задает нижнюю границу индексации (по умолчанию – равна нулю).

Можно изменить значение системных переменных двумя способами:

- с помощью символа **:=** (**присваивание**) на рабочем листе;
- через меню *Math → Options*, вкладка *Build-In Variables*.

Пример.

$\mathrm{ORIGIN} := -2$

$t := -2 .. 3 \qquad a_t := 2 \cdot t$

$$a = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Приложение 5

Панель Программирование

Панель программирование доступна через меню *View → Toolbars→Programming* (*Вид→ Панели инструментов → Программирование*)). В таблице П1 приведено описание кнопок, расположенных на данной панели.

Таблица П1

Обозначение кнопки	Назначение	Шаблон на рабочем листе
Add Line	***Добавить строку программы.*** Повторные нажатия данной кнопки увеличивают количество строк.	| ▪ | ▪
←	***Локальное присваивание.*** Действует в пределах тела данной функции. Имеет два аргумента. В переменную в аргументе слева от стрелки помещается значение, вычисленное по формуле, стоящей в аргументе справа от стрелки.	▪ ← ▪
if	***Оператор условия.*** Имеет два аргумента. Выполняется действие, указанное в аргументе слева от if, при выполнении условия, стоящего в аргументе справа от if.	▪ if ▪
otherwise	***Оператор «в противном случае».*** Применяется совместно с оператором (операторами) условия. Имеет один аргумент. В случае, если не выполняется ни одно условие, указанное в операторах if, выполняется действие, указанное в аргументе otherwise.	▪ otherwise
for	***Цикл со счетчиком.*** Аналог одноименного цикла языка Паскаль. Шаблон имеет три аргумента. В аргументе слева от символа ∈ указывается счетчик цикла, справа – диапазон изменения счетчика (с помощью *перечисления*), снизу от for – тело цикла. Если тело цикла должно содержать более одного оператора, то эти операторы объединяются с помощью кнопки *Add Line*.	for ▪ ∈ ▪ ▪
while	***Цикл с условием.*** Аналог одноименного цикла языка Паскаль. Шаблон имеет два аргумента: 1) в заголовке цикла (справа от while) указывают условие выполнения цикла, 2) снизу от while – тело цикла. Если тело цикла должно содержать более одного оператора, то эти операторы объединяются с помощью кнопки *Add Line*.	while ▪ ▪

Продолжение таблицы П1

Обозначение кнопки	Назначение	Форма на рабочем листе
break	***Выход из цикла.*** Аналог одноименного оператора языка Паскаль. Аргументов не имеет.	break
continue	***Переход к следующей итерации цикла.*** Аналог одноименного оператора языка Паскаль. Переход к следующее Аргументов не имеет.	continue
return	***Возврат значения.*** Имеет один аргумент. Применяется при создании функций. Функция возвращает значение, указанное в аргументе return. По умолчанию (без указания return) функция возвращает значение, указанное в последней строке программы.	return ▪
on error	***Оператор перехода при возникновении ошибки.*** Имеет два аргумента. Сначала вычисляется выражение в правом аргументе оператора. Если ошибки не происходит, то возвращается это вычисленное значение. В случае возникновения ошибки возвращается левый аргумент.	▪ on error ▪

Ниже приведены примеры применения указанных операторов из панели Программирование.

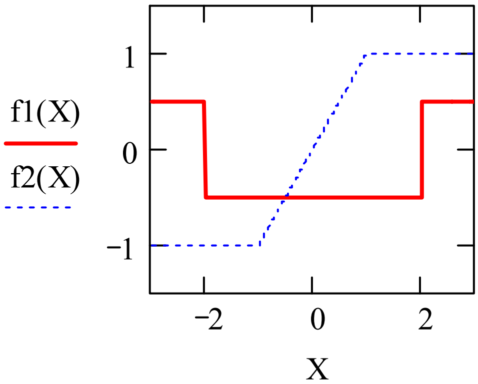
$x := 25$ $\qquad \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} = 0.212$

$\left| \begin{array}{l} x \leftarrow 12 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} \end{array} \right. = 0.328$ $\qquad$ Локальное (в пределах данной программы) переопределение переменной x. Здесь x=12 . . .

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} = 0.212$ $\qquad$ . . . но вне тела программы переменная сохраняет свое первоначальное значение.

$$f1(x) := \begin{array}{|l} 0.5 \ \text{ if } \ |x| > 2 \\ -0.5 \ \text{ otherwise} \end{array}$$

$$f2(x) := \begin{array}{|l} -1 \ \text{ if } \ x < 1 \\ x \ \text{ if } \ |x| \le 1 \\ 1 \ \text{ otherwise} \end{array}$$



$$f3(n) := \begin{array}{|l} \text{for } \ k \in 0..n \\ \quad a_k \leftarrow k^2 \\ a \end{array}$$

$$f3(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

ORIGIN := 1

$$f4(\varepsilon) := \begin{array}{|l} \text{for } \ k \in 1..100 \\ \quad \begin{array}{|l} \text{break } \ \text{if } \ \dfrac{1}{k} < \varepsilon \\ s_k \leftarrow \dfrac{1}{k} \end{array} \\ s \end{array}$$

Возвращает ряд 1/n, n=1, 2, ..., 100, члены которого -- не менее указанной точности.

$$f4(0.22) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.333 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$f6(x) := \begin{array}{|l} \text{if } \ x = 0 \\ \quad \begin{array}{|l} a \leftarrow -1 \\ \text{return } \ a \end{array} \\ t \leftarrow 0 \\ \text{for } \ k \in 1..x \\ \quad t \leftarrow t + k \\ t \end{array}$$

Возвращает сумму натуральных чисел от 1 до x, если x не равен 0, и возвращает -1, если x=0.

$$f6(0) = -1$$

$$f6(3) = 6$$

$$f5(x) := \text{"Error"} \quad \text{on error} \left(\frac{1}{x}\right) \qquad f7(x) := 10^{15} \quad \text{on error} \ \frac{1}{x}$$

$$f5(2) = 0.5 \qquad f7(2) = 0.5$$

$$f5(-3) = -0.333 \qquad f7(-3) = -0.333$$

$$f5(0) = \text{"Error"} \qquad f7(0) = 1 \times 10^{15}$$

$$\mathbf{F(x)} := \left| \begin{array}{ll} \text{error("x must be positive")} & \text{if } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{F(3)} = 0.333 \qquad \mathbf{F(0)} = \blacksquare$$

$$\boxed{\mathbf{F(-3)} = \blacksquare\blacksquare}$$

x must be positive

Определяемое пользователем сообщение об ошибке

$$f(n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \left. \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{continue} \quad \text{if } \operatorname{mod}(k,2) = 0 \\ s \leftarrow s + k \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{if } n \ge 0 \\ \left. \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..|n| \\ \quad s \leftarrow s + k \end{array} \right. \quad \text{otherwise} \\ s \end{array} \right.$$

$$f(10) = 25 \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$f(-10) = 55 \qquad \sum_{j=0}^{10} j = 55$$

Возвращает сумму нечетных целых чисел от 0 до n, если n больше или равно 0, и сумму всех модулей от 0 до |n|, если n<0.

Приложение 6

Преобразования функций из аналитического вида в табличный

Пусть нам дана функция в аналитическом виде:

$$y=f(x),\ \{x \mid x1 \le x \le x2\}.$$

Требуется получить функцию в табличном виде. В первой строке таблицы аргумент x=x1, в последней строке x=x2, а остальные строки содержат промежуточные значения аргумента функции, взятые с равным шагом. Другими словами, необходимо сформировать массивы аргументов и значений функции:

$$x_j; \quad y_j = f(x_j); \quad j=0, \ldots, N; \quad x_0=x1; \quad x_N=x2,$$

где $x = \alpha(j)$ есть линейная зависимость. Конкретизацию формулы $x = \alpha(j)$ производим расчетом «на бумаге». Составляем общую формулу линейной зависимости:

$$x_j = A \cdot j + B, \ (j=0, 1, \ldots, N),$$

где A, B – постоянные коэффициенты, и, решая следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x1 = A \cdot 0 + B \\ x2 = A \cdot N + B \end{cases}$$

получаем:

$$B = x1, \quad A = \frac{x2 - x1}{N},$$

$$\boxed{x_j = \frac{x2 - x1}{N} \cdot j + x1, \quad j = 0, \ldots, N.} \qquad (П6.1)$$

~~Некоторые приложения~~

I. Диаграмма Найквиста

Теория автоматического управления рассматривает ряд простейших динамических звеньев. В их числе – *инерционное звено*, комплексная передаточная функция которого имеет следующий вид:

$$W(j\omega)=\frac{K}{T\,j\omega+1},$$

где $W()$ – передаточная функция звена; j – мнимая единица; ω – круговая частота; K – коэффициент передачи; T – постоянная времени.

Диаграмма Найквиста (амплитудно-фазовая частотная характеристика) представляет собой двумерный график, где по оси абсцисс откладывают действительную часть передаточной функции, а по оси ординат – мнимую часть. Построение диаграммы Найквиста инерционного звена средствами Mathcad показано на рисунке П5. При этом использована формула (П7.1), см. приложение 7.

Внимание! Для мнимой единицы Mathcad предусматривает два имени: **i** или **j**. Для ввода мнимой единицы с клавиатуры набирайте соответственно **1i** или **1j**. Но можно перед мнимой единицей ставить и другие числа, что может привести к типичной ошибке. Например, если, используя j в качестве переменной, не поставить перед ней знака умножения, то данный ввод с клавиатуры Mathcad будет интерпретировать как мнимое число:

$$2 + 3j = 2 + 3i \ .$$

Мнимую единицу можно ввести и с инструментальной панели *View → Toolbars → Calculator*.

$$N := 1000 \qquad m := 0..N \qquad \omega1 := 0 \qquad \omega2 := 10000 \qquad \omega_m := \frac{\omega2-\omega1}{N}\cdot m+\omega1$$

$$K := 10 \qquad T := 0.01 \qquad W_m := \frac{K}{T\cdot j\cdot \omega_m+1}$$

W =

	0
0	10
1	9.901-0.99i
2	9.615-1.923i
3	9.174-2.752i
4	8.621-3.448i
5	8-4i
6	7.353-4.412i
7	6.711-4.698i
8	6.098-4.878i

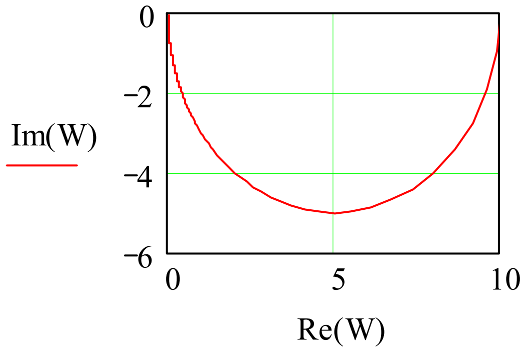


Рисунок П5